UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA
FACULTY OF EDUCATION

MENON

©online

Journal of Educational Research

A National and International Interdisciplinary Forum for Scholars, Academics, Researchers and Educators from a wide range of fields related to Educational Studies

Ἔχεις μοι εἰπεῖν, ὦ Σώκρατες, ἆρα διδακτὸν ἡ ἀρετή; ἢ οὐ διδακτὸν ἀλλ' ἀσκητόν; ἢ οὔτε ἀσκητὸν οὔτε μαθητόν, ἀλλὰ φύσει παραγίγνεται τοῖς ἀνθρώποις ἢ ἄλλῳ τινὶ τρόπῳ

ISSN: 1792-8494

4th Issue
Florina, April 2017

ABOUT MENON

The scope of the MENON is broad, both in terms of topics covered and disciplinary perspective, since the journal attempts to make connections between fields, theories, research methods, and scholarly discourses, and welcomes contributions on humanities, social sciences and sciences related to educational issues. It publishes original empirical and theoretical papers as well as reviews. Topical collections of articles appropriate to MENON regularly appear as special issues (thematic issues).

This open access journal welcomes papers in English, as well in German and French. Allsubmitted manuscripts undergo a peer-review process. Based on initial screening by the editorial board, each paper is anonymized and reviewed by at least two referees. Referees are reputed within their academic or professional setting, and come from Greece and other European countries. In case one of the reports is negative, the editor decides on its publication.
Manuscripts must be submitted as electronic files (by e-mail attachment in Microsoft Word format) to: mejer@uowm.gr or via the Submission Webform.

Submission of a manuscript implies that it must not be under consideration for publication by other journal or has not been published before.

MENON © is published at **UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA – FACULTY OF EDUCATION**

LIST OF REVIEWERS

The Editor and the Editorial Board of the **MENON: Journal of Educational Research** thanks the following colleagues for their support in reviewing manuscripts for the current issue.

- **Sofia Avgitidou**
- **Konstantinos Christou**
- **Katerina Dimitriadou**
- **Nikolaos Fotopoulos**
- **Stamatis Gargalianos**
- **Eleni Griva**
- **Georgios Iordanidis**
- **Triantafyllia Kadoglou**
- **Stavros Kamaroudis**
- **Kostas Kasvikis**
- **Charalampos Lemonidis**
- **Ioannis Mpetsas**
- **Konstantinos Nikolantonakis**
- **Georgios Palaigeorgiou**
- **Nektaria Palaiologou**
- **Vasiliki Papadopoulou**
- **Anastasia Stamou**
- **Ifigeneia Vamvakidou**

*Design & Edit: **Elias Indos***

ISSN: 1792-8494

CONTENTS

ETG IDOINES EN FRANCE, EN GRÈCE ET AU QUÉBEC – UNE ÉTUDE COMPARATIVE SUR LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ

Vincent Beck
Université d'Orléans et MAPMO
vincent.beck@univ-orleans.fr
Annette Braconne-Michoux
Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca
Hélène Gagneux
Université d'Orléans
Assia Nechache
Université d'Orléans et LDAR
Assia.nechache@univ-orleans.fr
Kostas Nikolantonakis
Université de Macédoine Ouest
knikolantonakis@uowm.gr
Laurent Vivier
Université Paris Diderot et LDAR
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr
Patrick Wieruzsewski
Université d'Orléans
patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr

Abstract

In this paper, we study and compare the personal and ideal Geometrical Working Spaces in France, Greece and Quebec for the future primary school Teachers'. This work extends a previous research in which a test elaborated from the Greek side, after translation, has been given to French students. For this second study we use a more important number of students (166 Greeks and 103 French). The test exercises were chosen from the French side but 2 of these exercises were, with some modifications, from the first test (exercises 2 and 3). To complete the analyses, these 2 exercises were proposed to 41 students from Quebec. The global question of this second study was the following: if we propose to Greek students exercises that come from the ideal French Geometrical working Space, are they going to be more flexible. For each item we have elaborated one *a priori* analysis and we used the software CHIC for the evaluation.

Keywords*: Mathematical Working Space, Geometry, Prospective Teacher Training, Proof*

1. Introduction

L'étude vise à comparer les Espaces de Travail Géométrique (Kuzniak, 2006, 2010 ; Houdement et Kuzniak, 2006) idoines et personnels qui sont au cœur des formations initiales des enseignants du premier degré en France, en Grèce et au Québec. On s'appuie sur les productions écrites en temps limité de professeurs en formation initiale. Ce travail prolonge celui de Nikolantonakis & Vivier (2014) où une première étude a été menée avec un examen grec proposé, après traduction, pour comparaison à des étudiants français.

Pour cette étude, nous nous appuyons sur un nombre plus important d'étudiants-professeurs (166 grecs et 103 français). Les items sont issus d'un sujet proposé aux étudiants français, sujet extrait d'un sujet de Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles (CRPE), hormis deux exercices repris, avec des variations, de la précédente étude (exercices 2 et 3). Pour compléter les analyses, ces deux derniers exercices ont aussi été proposés à 41 étudiants québécois.

Au regard des thèmes abordés, la première étude avait permis de montrer, d'une part qu'il y a une adéquation forte entre les ETM_G[1] personnels et l'ETM_G idoine chez les étudiants grecs, et d'autre part, que la différence des ETM_G idoines français et grec demande aux étudiants français, faces à des *tâches grecques*, diverses adaptations ce qui semble entraîner une flexibilité et une certaine richesse dans leurs réponses, ce qui contraste avec les réponses stéréotypées issues de l'ETM_G idoine grec.

La question globale de cette seconde étude consiste à se demander si, en proposant aux étudiants grecs des exercices issus de l'ETM_G idoine français, ceux-ci montreront plus de flexibilité.

Pour chacun des exercices, une grille d'évaluation basée sur une analyse a priori des exercices et permettant une utilisation du logiciel CHIC (Gras & al., 2009) a été élaborée.

2. Contexte de l'étude

2.1 Trois systèmes de formation différents

De nombreux changements sont intervenus en formation des enseignants depuis 2009. Nous nous focalisons donc sur les points essentiels, et toujours d'actualité, des formations en France, en Grèce et au Québec.

En Grèce, dès l'entrée à l'université, les étudiants se destinant au professorat du premier degré doivent faire le choix d'une université pédagogique où ils préparent, en quatre ans, un diplôme. Ils peuvent passer un concours de recrutement national ou devenir contractuel. Au Québec, comme en Grèce, les étudiants suivent une formation sur 4 ans après le DEC (Diplôme d'Études Collégiales) qui marque la fin de la scolarité secondaire. Avant d'aborder cette formation exclusivement consacrée à l'enseignement au niveau primaire, les étudiants suivent des cours de remise à niveau en mathématiques et en français. En France, pendant les trois premières années universitaires, les étudiants préparent une licence de leur choix. C'est seulement

[1] ETM_G : Espace de Travail Mathématique Géométrie

ISSN: 1792-8494

ensuite qu'ils préparent un concours spécifique pour l'enseignement primaire. Après obtention de ce concours, ils sont, après validation d'une année de stage et de formation, titulaires d'un poste d'enseignement du premier degré.

On relève donc une année universitaire d'enseignement de plus en France, mais en Grèce et au Québec, les quatre années de formation sont totalement destinée à l'enseignement primaire contre seulement deux en France.

Les institutions d'enseignement primaire diffèrent sur deux points essentiels. En Grèce et au Québec, l'enseignement primaire se poursuit jusqu'au grade 6 inclus alors qu'en France il se termine après le grade 5. Avec une année de plus d'enseignement dans le premier degré en Grèce, il y a plus de notions mathématiques à enseigner qu'en France. Parallèlement, on constate rapidement que, à niveau d'âge identique, les programmes grecs sont, en mathématiques, plus consistants que les programmes français. Ainsi, les professeurs du premier degré en Grèce doivent maîtriser, pour les enseigner, un plus grand contenu mathématique que leurs homologues français. Au Québec, comme en Grèce, l'école primaire s'étale sur 6 années (réparties en 3 cycles) mais les objectifs à atteindre ne sont pas clairement explicités dans le programme. Cette ambiguïté est source de bien des difficultés dans les classes.

2.2 La géométrie dans la formation des enseignants

Les contextes de formation en France et en Grèce concernant la géométrie sont très similaires et classiques à l'exception de deux points : en Grèce, et depuis l'enseignement secondaire, une attention particulière est portée aux cas d'égalité des triangles et aux triangles semblables (dès la fin du *gymnasio*, grade 9) alors qu'en France, les théorèmes sur les triangles isométriques sont à peine vus en classe de seconde (les triangles isométriques ne sont plus au programme du secondaire en France depuis 2009, grade 10), et les triangles semblables ne sont essentiellement abordés qu'à travers le théorème de Thalès. En revanche, en France les transformations sont enseignées avec une tradition forte même si l'on note aujourd'hui un certain déclin. Avant les changements de programmes du collège qui ont eu lieu en 2008, il y avait une transformation nouvelle par année (symétrie axiale, symétrie centrale, translation et rotation). Aujourd'hui la translation et la rotation ne sont plus au programme. Néanmoins, les symétries axiale et centrale restent des objets importants de l'enseignement des mathématiques en France au secondaire. En Grèce, ces deux transformations sont à peine mentionnées dans le secondaire. À propos des transformations, la situation au Québec est encore différente : la symétrie axiale (réflexion) et la translation sont travaillées dès le primaire, essentiellement sur des supports quadrillés puis, la rotation et l'homothétie sont étudiées au secondaire pour les constructions à la règle et au compas (rotation) et pour les calculs de longueurs (en ce qui concerne l'homothétie). Les cas d'égalité et les cas de similitude des triangles sont aussi au programme de fin de secondaire mais les activités qui sont associées à ces sujets relèvent toutes de calculs de mesures manquantes. La démonstration en géométrie est donc peu abordée dans le programme général du secondaire. C'est à la fin du collégial (dernière année avant l'université) que les élèves qui suivent la voie scientifique étudient les différentes formes de preuves.

ISSN: 1792-8494

Les cours dispensés aux futurs enseignants sont dans la ligne de cette tradition même si, en France, les transformations ne sont pas au centre des enseignements. On se rend compte alors que, sur ces deux points, égalités des triangles et transformations géométriques, les trois systèmes scolaires montrent des traditions différentes, ce qui oriente les choix pour résoudre un exercice. On peut raisonnablement penser que, le cas échéant, un étudiant grec préférera utiliser le théorème sur l'égalité des triangles alors qu'un étudiant français s'orientera plutôt vers l'utilisation d'une transformation. Nous verrons que ce n'est pas tout à fait le cas pour les étudiants français car les configurations de base comme le parallélogramme constituent aussi des outils importants de la géométrie : il n'y a pas d'équivalent français au théorème sur l'égalité des triangles utilisé en Grèce. On peut faire l'hypothèse que les étudiants québécois se référeront aux cas d'égalité des triangles comme les étudiants grecs, au détriment des propriétés des parallélogrammes, mais avec moins de rigueur puisque les deux exercices proposés sont très éloignés des activités menées au cours du trimestre de didactique de la géométrie au primaire et des activités que les étudiants ont connu au cours de leur propre scolarité au secondaire.

Les étudiants français participant à l'étude ont reçu un total de 30 heures sur la géométrie en tout début d'année universitaire. Les étudiants grecs ont reçu un total de 18 heures attribués à des notions de géométrie. Au moment de la passation des épreuves de l'étude, les étudiants québécois ont suivi un enseignement de 36 heures de géométrie (théorie et didactique).

Les sujets ont été proposés aux étudiants français dans les conditions du concours, sur les six centres IUFM de l'académie d'Orléans-Tours et les résultats concernent 103 étudiants. Les items de l'analyse ont été traduits en grec et proposés en examen en première année de l'université pédagogique de Macédoine Ouest auprès de 166 étudiants. Indépendamment des questions de traduction, certaines questions du problème n'ont pas été posées aux étudiants grecs (tracé de la figure à l'échelle et tableur) puisqu'elles ne correspondent pas à des tâches usuelles du cursus grec.

Au Québec, les exercices 2 et 3 ont été proposés à 41 étudiants de l'Université de Montréal, à la fin du trimestre consacré à la didactique de la géométrie.

3. La notion d'espace de travail géométrique

Nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) et Kuzniak (2010, 2011) des paradigmes géométriques et des espaces de travail géométrique afin de prendre en compte la spécificité géométrique du travail d'un sujet. L'espace de travail géométrique (ETM_G) est un univers organisé pour le travail du géomètre et comporte deux niveaux, le plan épistémologique et le plan cognitif (Kuzniak, 2010).

Le plan épistémologique se structure avec la mise en réseau des trois composantes suivantes :

- un espace réel et local avec un ensemble d'objets de nature sensible ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments utilisés par le géomètre ;
- un référentiel théorique constitué de définitions et de propriétés.

La fonction de l'ETM_G dépend fortement aussi d'une dimension cognitive structurée autour des trois processus suivants : visualisation, construction et preuve (Duval, 2005).

Les différents types de traitement des figures au sens de Duval permettent de décrire l'articulation entre les composantes de l'ETM_G et de décrire la conceptualisation en jeu.

L'adaptation des composantes conduit à considérer différents types d'ETM_G. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'ETM_G personnel des étudiants futurs professeurs qui est celui que les élèves s'approprient en fonction de leurs connaissances mathématiques, de leurs capacités cognitives et du contrat en jeu (Houdement & Kuzniak, 2006).

3.1 Les ETG de référence, idoine et personnel

Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de penser, définit un ETM_G de référence. Pour connaître cet ETM_G, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETM_G dépend du paradigme privilégié : Géométrie I, II ou III (Houdement & Kuzniak, 2006).

Une fois posées les bases de la géométrie enseignée, il reste à se préoccuper de son enseignement effectif qui nécessite l'existence d'un espace propice à l'enseignement réussi de la géométrie visée. L'ETM_G de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. En transformant le savoir en jeu, les professeurs aménagent un ETM_G qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse mais qui peut n'être pas adéquat à sa fonction attendue en se révélant non performant lors de sa mise en œuvre dans les classes.

Les ETM_G idoines doivent être investis par les élèves et étudiants qui se les approprient avec leurs connaissances et leur fonctionnement cognitif particuliers, donnant lieu à des espaces de travail appelés ETM_G personnels. Ils se constituent de manière progressive et peuvent parfois ne pas être opérationnels. La notion d'ETM_G personnel ne concerne pas uniquement les élèves et les étudiants, elle concerne aussi les professeurs. En effet, ces derniers doivent avoir une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique idoines afin d'éviter les malentendus résultant d'une gestion floue et implicite du jeu entre les paradigmes.

Dans la pratique, les ETM_G personnels et idoines, ne reposent pas sur un seul paradigme mais plutôt sur une articulation entre les paradigmes et celle-ci peut être maîtrisée ou non. Un changement de domaine permet de faire le lien entre deux ETM_G relatifs à des domaines différents (la fibration, cf. Kuzniak & Richard, à paraître), pour leur articulation. Mais on peut aussi y voir un effet de contrat, de l'ETM_G idoine pour faire ce type de problème. Si le changement de domaine est automatique, systématique, cela participe-t-il à la conceptualisation ?

3.2 Traitements de la figure et composants épistémologiques de l'ETMG

Duval (2005) discute le rôle de la visualisation dans le développement du raisonnement en géométrie. Il distingue différents types de traitement de la figure :

- la décomposition méréologique implique un découpage de la figure de départ en sous-figures de même dimension ;
- la déconstruction instrumentale implique l'utilisation d'instruments (règle graduée, compas, etc.) dans le but de reconstruire la figure ;
- la déconstruction dimensionnelle implique une déconstruction en unités figurales de dimension inférieure dans le but de mettre en relation ces unités figurales.

Ces différents types de traitement de la figure impliquent une organisation différente des composantes de l'ETM_G. La décomposition méréologique suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages et superposition de la figure : le pôle "espace réel et local" de l'ETM_G sera le pôle dominant. La déconstruction instrumentale implique la mise en œuvre d'instruments dans un but de construction : dans ce cas, le pôle "artefact" sera dominant. La déconstruction dimensionnelle permet de mettre en évidence des relations entre unités figurales de dimensions inférieures et d'en déduire des propriétés géométriques associées à un raisonnement déductif : le pôle "référentiel théorique" est le pôle dominant. À chaque traitement de la figure est associée une organisation différente de l'ETM_G et peut permettre de caractériser les ETM_G personnels.

4. Méthodologie

La méthodologie développée vise à identifier les ETM_G idoines en France et en Grèce, sur certaines notions, et notamment identifier les similitudes et les différences. Cela suppose qu'il existe un ETM_G idoine qui soit propre à chacune des institutions d'enseignement nationales. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'ETM_G personnel des étudiants futurs professeurs qui est sans doute très proche de celui que les élèves du secondaire s'approprient en fonction de leurs connaissances mathématiques, de leurs capacités cognitives et du contrat en jeu.

La méthodologie se fait en deux temps, en proposant les exercices d'un pays à l'autre et réciproquement. Les énoncés sont alors directement traduits. Il est aussi possible d'utiliser des « énoncés neutres », en laissant les étudiants interpréter les énoncés dans leur ETM_G personnel.

On peut penser que les énoncés des deux exercices sont neutres pour les deux populations FR et GR puisqu'ils peuvent s'interpréter dans les ETG idoines des deux pays, même si l'interprétation est différente, la situation n'est pas si claire pour la population QU vis-à-vis du deuxième exercice. Les énoncés sont également choisis en fonction des contrats didactiques et des attentes des institutions. Les traces laissées par les étudiants et associées aux ETM_G personnels permettent, statistiquement, de relever des tendances qui sont les traces de l'ETM_G idoine. Ainsi, les ETM_G idoines sont identifiés à travers les ETM_G personnels des étudiants, en ne se limitant pas uniquement aux pourcentages, mais aussi en utilisant les statistiques implicatives.

ISSN: 1792-8494

5. Le Test, Analyse a priori

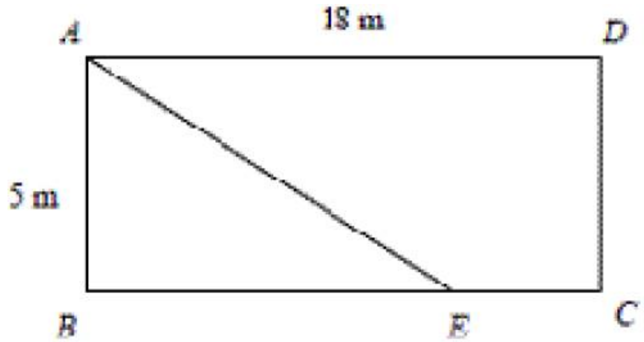
Nous proposons dans cette section une analyse a priori de trois activités extraites du test soumis aux deux populations française et grecque, en lien avec les ETM_G idoines des deux pays: d'après la première étude, on peut faire l'hypothèse d'un même ETM_G idoine pour l'exercice 2, et des ETM_G idoines très différents pour l'exercice 3. Nous donnons pour chaque exercice les indicateurs retenus pour l'étude statistique avec, pour chaque question, les deux indicateurs généraux suivants :

- **NR** : pas de réponse – l'exercice n'est pas abordé ou à peine. Cet indicateur est nécessaire pour les statistiques et ne montre pas qu'il n'y a pas eu d'activité mathématique.
- **OK** : bonne réponse – la solution est trouvée, sans erreur de raisonnement mais avec possibilité d'implicites.
- **Autres** : pour des procédures de résolution marginales

5.1 Exercice 2

Exercice 2 (avec figure) : Soit un rectangle ABCD tel que AB = 5 m et BC = 18 m. Trouver la position du point E sur [BC] telle que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.

Figure 1



Indicateurs spécifiques :

A/3 : partage en trois aires égales, si visualisation du découpage en 3 fois 1/3 (avec une surfigure, le rectangle DCEF) ou en 1/3 + 2/3 (sans forcément une surfigure), nécessite un travail préliminaire (décomposition méréologique non indiquée) dans le domaine de la géométrie

Equ : mise en équation, avec changement de domaine, si utilisation d'une équation (juste ou fausse) – hypothèse que l'introduction d'une lettre (x), pour désigner une longueur inconnue, a pour visée la résolution d'une équation ;

Surf : utilisation (ou repérage) de la surfigure le rectangle ABEF (ou DCEF) – lien avec A/3

Il s'agit d'un type d'exercice classique dans les manuels scolaires, en France comme en Grèce. On en trouve de nombreuses variantes plutôt dans les chapitres d'algèbre pour travailler la dimension outil des équations pour résoudre des problèmes de géométrie. On le trouve aussi au Québec mais dans les chapitres de géométrie. Il s'agit d'un énoncé proposé dans les ETM_G idoines français et grecs, on ne s'attend donc pas à

ISSN: 1792-8494

des différences importantes entre les productions des deux populations. Le même exercice avec l'indication de « x » sur la figure avait été donné dans le premier test : ce changement de variable didactique fera l'objet d'une comparaison.

La procédure majoritaire (***procédure 1***) attendue : (ABE) = $5x/2$; (ADCE) = $18\times5–5x/2$ d'où l'équation $90–5x/2 = 5x$ que l'on résout pour trouver $x = 12$ (en mètre). Il s'agit d'une procédure avec un changement de domaine (de la géométrie avec les grandeurs vers l'algèbre).

Il n'y a pas de travail géométrique à proprement parler si ce n'est l'utilisation de la formule de l'aire d'un rectangle et celle d'un triangle rectangle. Il est à mentionner toutefois qu'une décomposition méréologique de la figure est nécessaire afin d'obtenir une équation. Mais cette décomposition est déjà indiquée sur la figure et on peut supposer que cela ne sera pas source de difficulté pour la plupart des étudiants, français ou grecs. En outre, ce type de décomposition méréologique est commun aux ETM_G idoines des deux pays.

Une variante de cette procédure consiste à utiliser la formule de l'aire d'un trapèze pour exprimer l'aire de ADCE : (ADCE) = $5\times(18+18–x)/2$. Il n'y a alors pas de décomposition méréologique.

Toutefois, d'autres procédures sont envisageables où l'essentiel du travail reste dans le domaine de la géométrie des grandeurs, sans changement de domaine vers l'algèbre. En complétant le rectangle ABEF, on peut découper le rectangle initial ABCD en trois aires égales par une décomposition méréologique (***procédure 2***). Le tiers de l'aire de ABCD est $1/3\times90$ m^2=30 m^2 et donc ABEF est un rectangle d'aire 60 m^2 avec un côté de 5 m, donc l'autre côté mesure 60 m^2/5 m=12 m.

Des adaptations de cette procédure sont possibles, notamment avec une mise en équation et donc un changement de domaine vers l'algèbre. Ainsi, après un découpage de ABCD en trois aires égales, peut-on s'attendre à une écriture d'une équation du type « $5x = 60$ », plus facile à résoudre.

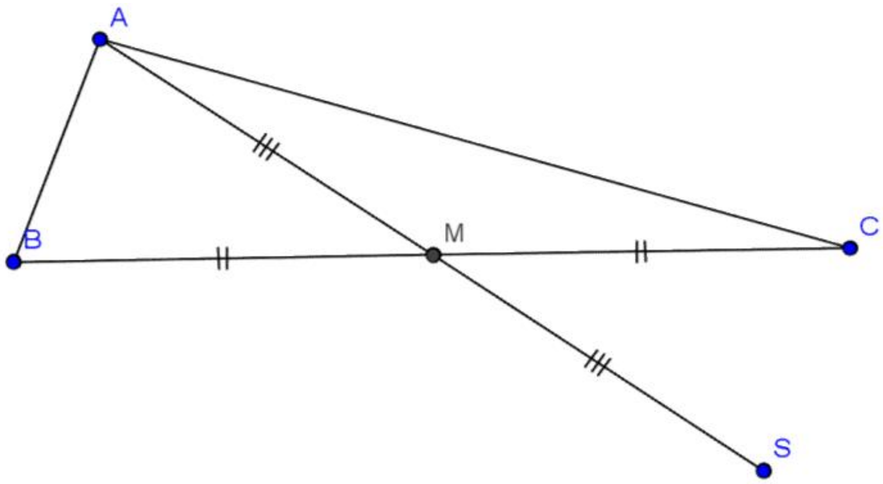
Les deux procédures ci-dessus sont nos guides pour cet exercice. Elles sont relatives à des ETM_G différents. Dans le premier ETM_G, le traitement géométrique est réduit au calcul de l'aire d'un trapèze, soit par soustraction (décomposition méréologique) soit par application de la formule d'un trapèze, et à l'utilisation de formules simples. Dans la deuxième, le traitement géométrique est plus complexe car il y a un intermédiaire à considérer, le rectangle ABEF, et la décomposition méréologique accompagne une reformulation des données du problème. Les calculs algébriques s'en trouvent largement simplifiés.

5.2 Exercice 3

<u>Exercice 3 (sans figure)</u> : Dans un triangle ABC, on note M le milieu de [BC] et on considère le point S sur (AM) tel que MS=MA et S≠A. Comparer les longueurs des segments [AB] et [SC].

ISSN: 1792-8494

Figure 2 (non donnée aux étudiants)



Indicateurs spécifiques :

Egal : utilisation d'un cas d'égalité du triangle, si utilisation (juste ou non) du théorème sur l'égalité des triangles

Par- Surf : mention/utilisation d'un parallélogramme (surfigure)

Sym : mention d'une symétrie centrale, si mention/utilisation d'une symétrie axiale

Les étudiants, français ou grecs, devront tout d'abord réinterpréter la question dans leur ETM_G idoine afin de trouver une procédure de résolution. On peut facilement imaginer que les étudiants grecs vont avoir une réponse en référence à l'ETM_G idoine sur les triangles égaux. Il y a des indicateurs, sans doute implicites, qui déclenchent chez les élèves l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles. Parmi ces indicateurs, on trouvera la comparaison d'angles ou de longueurs intervenant dans des cas d'égalité des triangles. L'interprétation par les étudiants français ne sera sans doute pas unique, car l'ETM_G idoine français permet plusieurs procédures de résolution dans le paradigme GII.

On peut identifier trois procédures principales.

Procédure 1 : utilisation du cas d'égalité des triangles Π-Γ-Π, les angles égaux, AMB = CMS, dans deux triangles les angles opposés par le sommet et AM = MS et BM = MC.

Procédure 2 : M est le milieu commun des diagonales du quadrilatère ABSC qui est donc un parallélogramme. Les propriétés du parallélogramme permettent de conclure.

Procédure 3 : M est le milieu de [BC] et de [AS], et les propriétés de la symétrie centrale de centre M permettent de conclure.

Pour cet exercice, on peut s'attendre à différentes approches de la part des étudiants français. Nous pensons qu'ils vont utiliser le parallélogramme et la symétrie. En revanche, on peut penser que la procédure 1 sera largement majoritaire chez les étudiants grecs, notamment à cause de la question « comparer les segments ». Des remarques relatives à la configuration du parallélogramme sont possibles car il s'agit d'un objet d'étude au secondaire en Grèce. Au Québec où la symétrie centrale est présentée comme une rotation de 180°, les procédures les plus courantes devraient faire appel aux souvenirs des étudiants à propos des cas d'égalité des triangles ou des propriétés des diagonales du parallélogramme, souvenirs qui remontent la 3^e^ année du secondaire pour certains d'entre eux (grade 9).

On relève ainsi trois ETM_G qui se distinguent pour l'essentiel par le référentiel théorique : un ETM_G autour des triangles égaux (***procédure 1***), un ETM_G autour du parallélogramme (***procédure 2***) et un ETM_G autour de la symétrie centrale (***procédure 3***). Il est toujours possible, bien que largement hors contrat en France comme en Grèce ou au Québec, que des étudiants se limitent à une visualisation ou un mesurage de la figure en référence au paradigme GI.

Bien entendu, d'autres procédures sont possibles, les trois ci-dessus sont celles attendues compte tenu de ce que l'on connaît des ETM_G idoines français, grec et québécois.

5.3 Problème (uniquement posé en France et en Grèce)

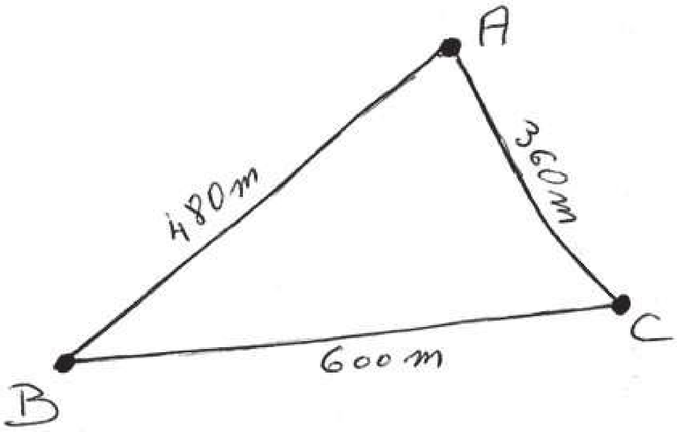
5.3.1 Les questions A

A1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

A2-a) Calculer l'aire du triangle ABC.

A2-b) En déduire la distance du point A à la droite (BC).

Figure 3



On ne retient pas d'indicateurs spécifiques, on se contente ici des variables OK et NR.

Les questions A1 et A2-a) proposent des changements standards entre les domaines géométrique et numérique. Ce sont des questions calculatoires et on s'attend, pour les étudiants grec et français à une utilisation du théorème de Pythagore et à l'utilisation de la formule du calcul d'aire dans un triangle rectangle. On fait l'hypothèse d'utilisation correcte massive du théorème de Pythagore dans les deux populations. On peut s'attendre, pour quelques cas marginaux à l'utilisation de l'équerre pour justifier le fait que le triangle ABC est rectangle, mais le dessin à main levée devrait limiter cette procédure. La question A2-b) devrait révéler plus de difficultés : elle utilise le résultat de la question précédente (même si le « En déduire » mobilise l'utilisation de la question A2-a)) et fait appel à la notion de distance d'un

ISSN: 1792-8494

point à une droite. On peut ainsi envisager un ETM_G idoine identique sur ces questions pour la France et la Grèce.

5.3.2 Les questions B1

B1) J est situé à égale distance des points A, B et C.

B1-a) Que représente le point J pour le triangle ABC ?

B1-b) Préciser la position particulière de J dans ce triangle.

Indicateurs spécifiques :

CCC : Centre du Cercle Circonscrit

MilH : Milieu de l'hypoténuse

OK : (si justification par des arguments mathématiques)

5.3.3 La question B2

B2) On place un point K milieu de [AB] et un point I au milieu de [AC]. Montrer que AKJI est un rectangle.

Indicateurs spécifiques :

DM : utilisation du théorème de la droite des milieux

Thal : utilisation du théorème de Thalès

3Dr : utilisation de la caractérisation d'un rectangle comme un quadrilatère ayant 3 angles droits (ou 4 angles droits)

Para : utilisation d'une caractérisation d'un parallélogramme avec en plus un angle droit

Hom : utilisation de deux rectangles homothétiques.

P2P : Perpendiculaires à deux parallèles.

CCC-med : (KJ) et (JI) sont les médiatrices (avec 3Dr par exemple).

Trian-isom : utilisation d'un découpage d'un triangle en 4 triangles isométriques

On rencontre dans cette question un ETM_G complexe avec de nombreuses procédures pour parvenir au résultat. Citons quelques procédures :

Procédure 1 : Utilisation de la droite des milieux pour montrer que (IJ) est parallèle à (AB) et (IK) est parallèle à (AC). On a ainsi un parallélogramme avec un angle droit en A.

Procédure 2 : Utilisation de la droite des milieux pour montrer que (IJ) est parallèle à (AB) et donc perpendiculaire à (AC) grâce à la propriété qu'une droite parallèle à une droite perpendiculaire à une troisième est aussi perpendiculaire à cette troisième droite et de même (IK) est perpendiculaire à (AB). On a ainsi un quadrilatère à trois angles trois.

Procédure 3 : AIJK est l'homothétique du rectangle obtenu en complétant ABC en un rectangle.

Procédure 4 : Comme J est le centre du cercle circonscrit, (KI) et (KJ) sont les médiatrices de [AB] et [AC]. On obtient ainsi un quadrilatère à trois angles droits.

Dans les procédures 1 et 2, le théorème de Thalès peut bien sûr remplacer la droite des milieux.

ISSN: 1792-8494

5.3.4 La question B3

B3) On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Montrer que si on se déplace sur le segment [KI], on reste à égale distance de A et H.

Indicateurs spécifiques :

Med : reformulation de la question en « (KI) est-elle la médiatrice de [AH] ? »

DM : utilisation du théorème de la droite des milieux

Thal : utilisation du théorème de Thalès

Hom : utilisation de triangles homothétiques

Equid : utilisation du centre du cercle circonscrit (CCC) à un triangle rectangle (deux fois : I pour ACH et K pour ABH)

Perp-mil : pour une preuve par perpendiculaire passant par le milieu.

Mixte : perpendiculaire et un point équidistant (ou un point équidistant et passe par le milieu).

Comme pour la question précédente, on se retrouve ici face un ETM_G complexe offrant de nombreuses variétés de procédures. Elles commencent par une traduction de l'équidistance en termes de médiatrice.

Procédure 1 : En utilisant deux fois la droite des milieux (dans ABC et dans ABH), (KI) est parallèle à (AB) et passe par le milieu de [AH].

Procédure 2 : Le point I est équidistant de A et H car c'est le milieu de l'hypoténuse [AB] dans le triangle ABH rectangle en H. Idem pour K. Ainsi (IK) est la médiatrice.

Procédure 3 : Par le raisonnement utilisé dans la procédure précédente, I est équidistant de A et H. On montre ensuite que (IK) est perpendiculaire à (AH) comme dans la procédure 1.

On peut s'attendre à ce qu'un certain nombre d'étudiants soient capables de reconnaître qu'il s'agit d'une question sur la médiatrice sans être capable de la traiter. La procédure 2 fait appel à une surfigure. Elle ne sera sans doute pas la plus fréquente.

6. Retour sur l'étude de Nikolantonakis & Vivier (2014)

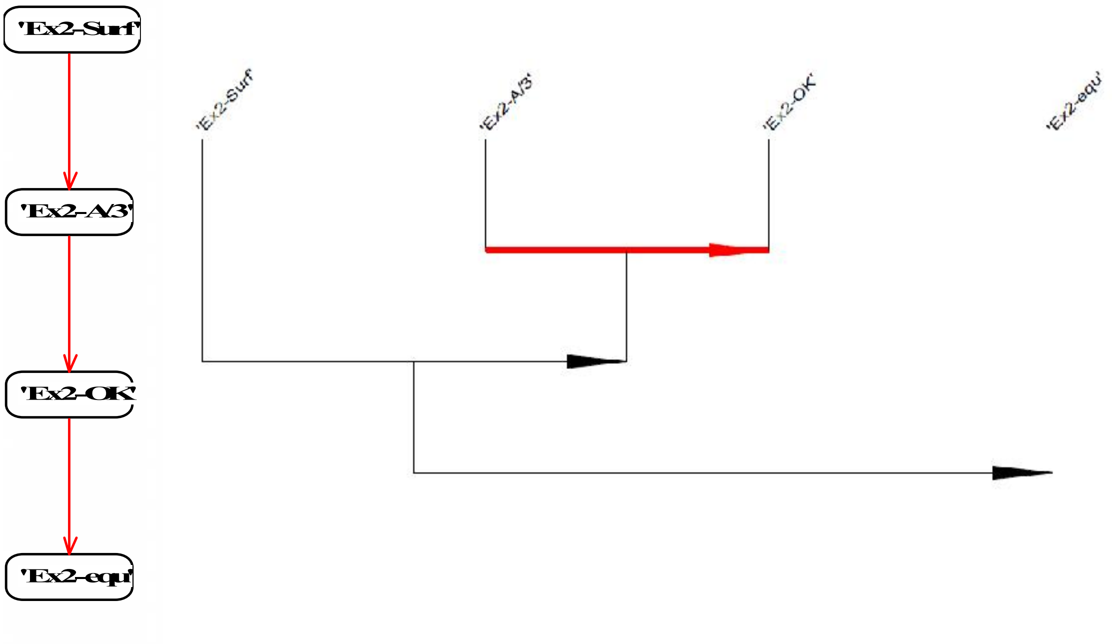
6.1 Exercice 2

Comme on pouvait s'y attendre, il y a une baisse de la proportion d'utilisation d'une équation (voir la table 1) puisqu'il n'y a plus de *x* indiqué sur la figure (comme dans le test initial). Néanmoins, les pourcentages d'utilisation d'une équation restent forts, ce qui est un indice d'un ETM_G idoine pour ce type de problème. Il y a également une baisse de la réussite et le fait d'opter pour une mise en équation, variable « equ », n'implique[2] pas la réussite, variable « OK », sans doute à cause d'erreurs algébriques. En revanche, la réussite implique l'utilisation d'une équation comme on peut le voir dans les graphes implicatifs (niveau 99) et cohésitifs (figure 4).

[2]au sens de la quasi-implication.

ISSN: 1792-8494

Figures 4: ***graphiques – population globale (Fr, Gr et Qu)***

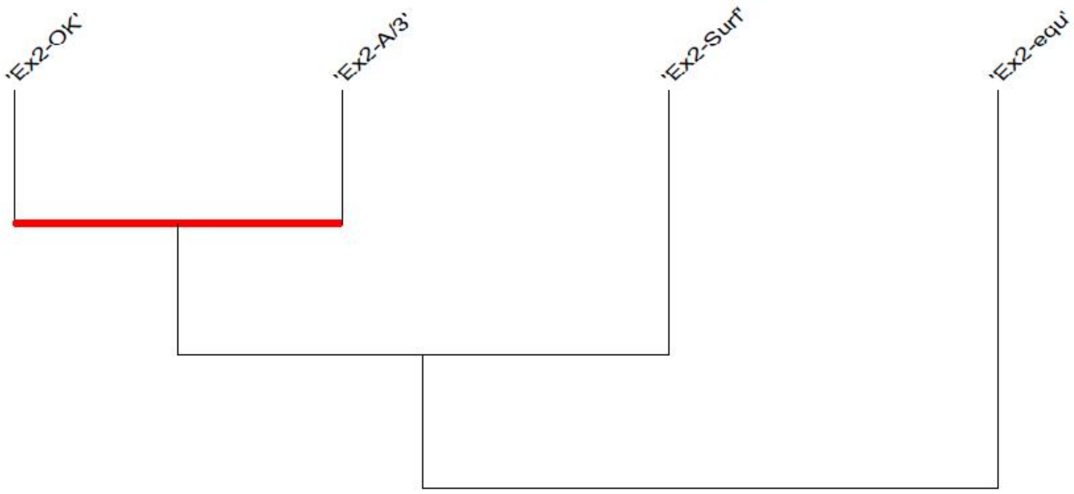


Cet ETM_G se retrouve aussi chez les étudiants québécois où l'algèbre est massivement utilisé.

Il est à noter que les étudiants qui ont imaginé le découpage en 3 aires égales ont presque tous réussi l'exercice. Ceci révèle une analyse pertinente de la figure géométrique et les traitements algébriques pour résoudre l'équation qui y sont associés sont élémentaires. En outre, on peut signaler l'importance, pour cet exercice, d'un travail dans le domaine source avant de faire le changement et que ce travail est favorisé par l'absence de l'indice « *x* » sur la figure (voir Montoya & Vivier, 2014).

Ainsi, la similarité entre 2-A/3 et 2-OK (figure 5) est-elle meilleure qu'entre 2-*eq* et 2-OK, ce qui peut s'expliquer par le fait que la mise en équation et la résolution d'équation pose problème à un quart des étudiants.

Figure 5: ***arbres des similarités***



ISSN: 1792-8494

6.2 Exercice 3

On retrouve dans l'exercice 3 une très forte présence de l'ETM$_G$ idoine associé à l'égalité des triangles en Grèce avec une proportion bien plus faible, attendue chez les étudiants français. Cela confirme que l'ETM$_G$ autour des triangles égaux constitue un ETM$_G$ idoine fondamental dans l'enseignement grec. Il est largement disponible pour les étudiants et est, de ce fait, un élément des ETM$_G$ personnels largement partagé, laissant peu de place à des ETM$_G$ alternatifs.

En faisant la comparaison sur les deux populations et avec les analyses de notre première étude nous pouvons dire que, dans la première étude, nous avions observé que le manque de référence théorique, conjugué à une influence liée à la formulation de l'énoncé, se percevait bien chez les étudiants français qui tentaient d'utiliser le théorème sur les triangles isométriques (54%). Mais avec l'adaptation de l'énoncé, les étudiants qui essayent d'utiliser ce théorème baissent (6,8%). On a ici un indice de l'ETM$_G$ à utiliser que l'on pourrait qualifier de *crucial* car, contrairement au « *x* » dans l'exercice précédent, sans cet indice, l'ETM$_G$ autour de l'égalité des triangles n'est plus utilisé par les étudiants français alors qu'il concerne environ la moitié des étudiants (sur 26) dans le cas où il est présent.

On remarque en outre, et cela provient vraisemblablement du fait que ce type de problème n'est pas lié à un seul ETM$_G$ idoine en France, qu'il n'y a pas de procédure type pour effectuer ce type d'exercice, ce qui amène la variété des procédures, entre les procédures 2 (avec parallélogramme) et 3 (avec la symétrie centrale). La situation est très différente de celle de l'exercice 2.

On peut penser que ces deux énoncés sont neutres pour les deux populations FR et GR car ils peuvent s'interpréter dans les ETM$_G$ idoines des deux pays, même si l'interprétation est différente. En revanche, il ne s'agit pas d'un énoncé neutre pour la population QU car les démonstrations ne sont pas dans l'ETM$_G$ idoine québécois. Pourtant les étudiants québécois ont largement réussi cet exercice. En effet, ils ont su proposer des réponses argumentées, faisant appel aux propriétés des figures qu'ils connaissaient, même si le formalisme d'une démonstration n'a pas toujours été respecté.

Table 1 : ***Résultats aux exercices 2 et 3 ; FR1 et GR1 réfèrent aux populations de la première étude***

	Exercice 2					**Exercice 3**				
	NR	**OK**	**equ**	**A/3**	**Surf**	**NR**	**OK**	**EgT**	**Surf**	**Sym**
FR1 (26)	8	81	81	8	/	12	69	54	31	54
GR1 (100)	14	70	85	15	/	12	77	86	0	0
FR (103)	15,5	54,4	64,1	23,3	1,9	16,5	49,5	6,8	42,7	15,5
GR (166)	10,2	44,0	62,0	17,5	3,0	6,6	53,0	88,0	2,4	0,0
QU (41)	0,0	51,2	82,9	46,3	46,3	0,0	73,2	9,8	4,9	0,0

ISSN: 1792-8494

7. Etude de l'ETMG Triangle Rectangle et Aire (Ex2, A1, A2a, A2b et B1)

Nous étudions dans cette partie un ETM_G sur les triangles rectangles, aires et théorème de Pythagore avec l'exercice 2 et les premières questions du problème (l'énoncé proposait un contexte de course dans une école, la figure à main levée était donnée, voir la figure 3).

Les arbres de similarité (figures 6 et 7) présentent des profils proches avec néanmoins des différences remarquables. Par exemples, les variables de réponses pour les questions B1 sont similaires à A1-OK (théorème de Pythagore) pour la population FR alors qu'elles sont similaires à A2b-OK pour la population grecque (distance d'un point à une droite). On peut penser que cela est le signe d'une structuration différente des ETM_G idoines FR et GR.

Figure 6: ***arbre des similarités – population Gr***

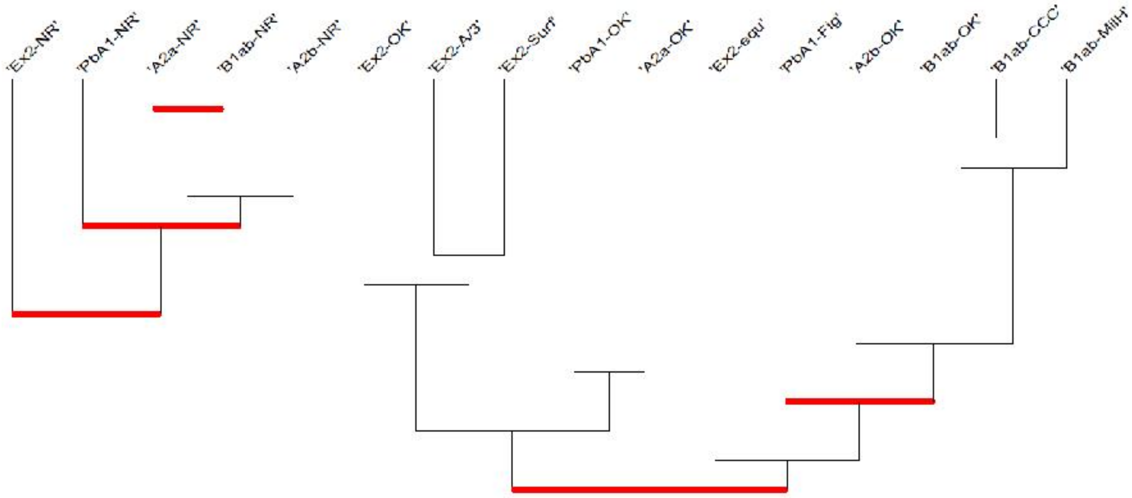
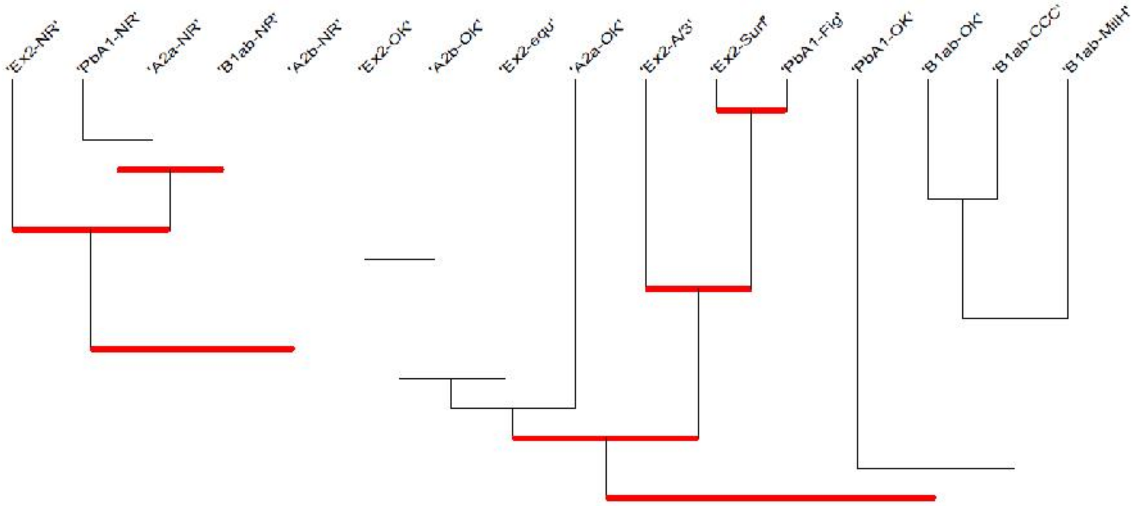


Figure 7: ***arbre des similarités – population Fr***



ISSN: 1792-8494

En regardant les pourcentages, les aspects calculatoires sur les aires ou dans l'utilisation du théorème de Pythagore, les populations grecque et française disposent d'ETM$_G$ idoines proches comme on peut le constater avec la table 2.

Table 2: ***Résultats, en pourcentages, aux questions A1, A2a et A2b***

	Pb - A1		Pb - A2a		Pb - A2b	
	NR	OK	NR	OK	NR	OK
FR (103)	6,8	73,8	7,8	75,7	37,9	31,1
GR (166)	16,9	62,0	12,0	65,7	32,5	19,9

En revanche, pour les caractéristiques géométriques du point J, cela n'est plus le cas puisque cette question nécessite l'introduction du cercle de centre J, un intermédiaire dans le travail. Les résultats sont :

Table 3: ***Résultats, en pourcentages, aux questions B1a et B1b***

	Pb-B1ab			
	NR	OK	CCC	MilH
FR (103)	8,7	44,7	66,0	47,6
GR (166)	16,3	30,1	30,7	20,5

Les étudiants grecs connaissent le théorème sur le cercle circonscrit à un triangle rectangle, pourtant 16,3% d'entre eux n'ont pas répondu. On peut penser que la différence provient d'un travail géométrique différent et donc d'un ETM$_G$ idoine différent.

8. Un ETMG Complexe (Ex3 et PB B2 B3)

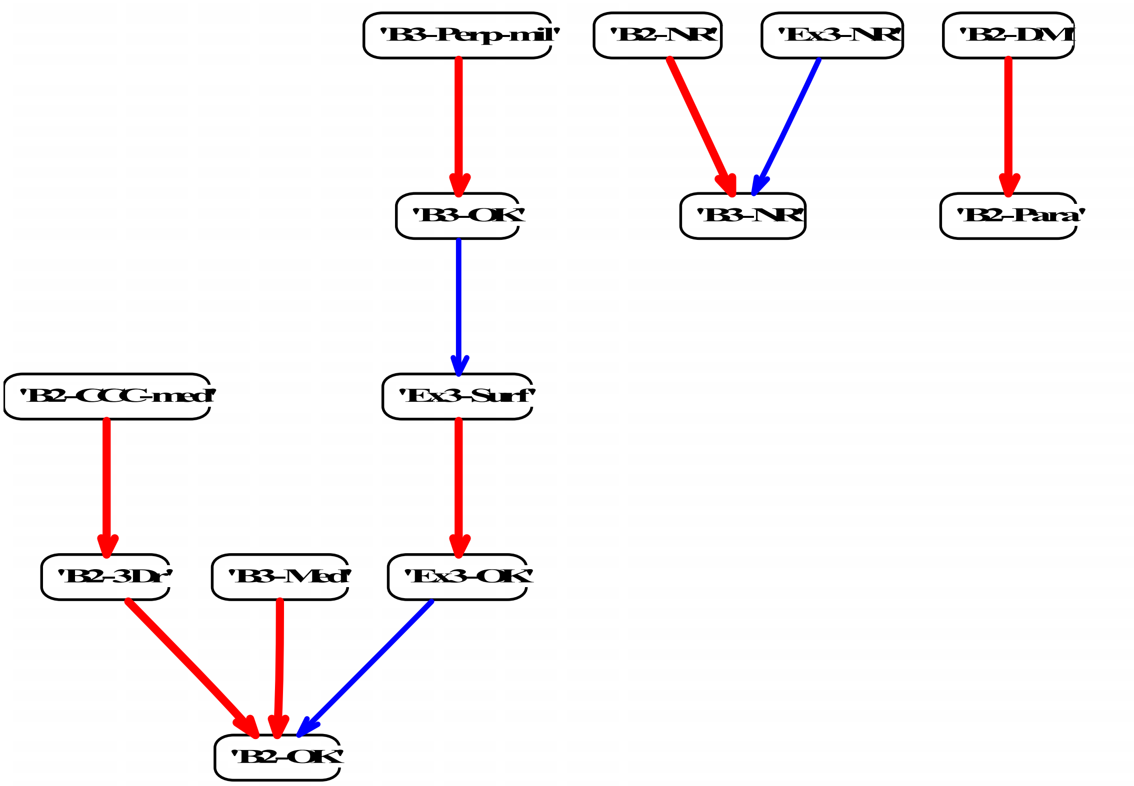
Il s'agit d'un ETM$_G$ autour de la démonstration dans les triangles qui est *complexe* car il rassemble plusieurs ETM$_G$ *simples* mais liés : des objets (triangle, rectangle, angles), des notions (équidistance, médiatrice), des théorèmes (droite des milieux et théorème de Thalès). Les procédures utilisées par les étudiants (notamment pour B2 et B3) sont nombreuses et les usages contrastés. On relève notamment : 1) aucune utilisation de rectangles homothétiques, alors que l'on aurait pu s'y attendre de la part des étudiants grecs ; 2) une forte utilisation de la caractérisation par trois angles droits des rectangles en France par rapport à la Grèce ; 3) aucune utilisation de la propriété d'une droite perpendiculaire à deux parallèles en Grèce (contre 13,6% en France) et 4) des cheminements variés dans les résolutions des questions chez les étudiants français.

Pour B2, on reconnaît (figure 8) la procédure 1 dans le bloc de droite (B2-DN →B2-para), mais sans lien avec la réussite à B2 ; on reconnaît également (figure 8) la procédure 4, à gauche (B2-CCC-med→B2-3Dr) qui implique la réussite à B2. Pour B3, les procédures sont peu visibles mais on relève l'importance pour la réussite de l'utilisation de la caractérisation de la médiatrice comme la perpendiculaire passant par le milieu.

ISSN: 1792-8494

Les ETM_G personnels sont variés et laissent entrevoir un ETM_G idoine large et donc offrant une flexibilité.

Figure 8 : graphe implicatif, population FR, questions B2, B3 et Exercice 3 ; niveaux 99 et 95.



Globalement, on relève une faible réussite à B2 chez les étudiants grecs (9% OK ; 38,6% NR) contrairement aux étudiants français (49,5% OK ; 19,4% NR). La réussite baisse pour B3 et les non-réponses augmentent à environ 50% pour les deux populations. Cet ETM_G *complexe* [illegible] grecs mais pose aussi des problèmes aux étudiants français comme on peut le constater aux tables cite ci-dessous.

Table 4: ***Résultats, en pourcentages, à la question B2***

	Pb-B2								
	NR	OK	DM	Thal	3Dr	Para	P2P	CCC med	Trian Isom
FR (103)	19,4	49,5	18,4	6,8	42,7	24,3	13,6	22,3	0,0
GR (166)	38,6	9,0	10,8	3,0	12,0	27,1	0,0	2,4	10,2

Table 5: ***Résultats, en pourcentages, à la question B3***

Pb-B3								
	NR	**OK**	**DM**	**Thal**	**Med**	**Equid**	**Perp mil**	**mixte**
FR (103)	45,6	19,4	12,6	14,6	16,5	2,9	8,7	9,7
GR (166)	53,0	7,2	14,5	12,7	14,5	36,1	12,0	0,0

9. Conclusion

En Grèce, avec un ETM_G de référence fortement lié à la tradition euclidienne, on remarque un ETM_G idoine autour du théorème d'égalité des triangles bien installé qui induit des ETM_G personnels en adéquation avec cet ETM_G idoine. De ce fait, les étudiants grecs, face à un exercice de géométrie, se placent immédiatement dans cet ETM_G. Bien entendu, cela n'est pas toujours aussi systématique et il n'y a qu'à considérer l'exercice 2 où cet ETM_G n'est pas du tout convoqué, pour s'en convaincre. Il y a donc des indicateurs, sans doute implicites, qui déclenchent chez les élèves l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles. Parmi ces indicateurs, on peut penser que des demandes de comparaison d'angles ou de longueurs intervenant dans des triangles jouent un rôle important.

Les étudiants français montrent une certaine flexibilité de leurs ETM_G personnels, avec l'utilisation des ETM_G autour de transformations géométriques et l'utilisation de surfigures, variété des réponses qui augmente avec l'étude du parallélogramme à l'exercice 3 car il n'y a pas qu'un seul ETM_G idoine pour ce type de problème en France contrairement à ce qui se passe en Grèce.

Enfin, concernant les décompositions méréologiques, on peut remarquer une différence entre les deux populations. Pour l'exercice 2, ce type de décomposition ne constitue, sans surprise, pas de problème.

Après avoir proposé aux deux populations grecque et française, des exercices issus de chaque pays, on constate que les étudiants grecs ont à leur disposition un ETM_G personnel plus restreint et lié à l'ETM_G idoine alors que les étudiants français semblent témoigner d'une plus grande flexibilité en fonction de la situation géométrique et de sa présentation (formulation et illustration).

Pour les aspects calculatoires sur les aires ou dans l'utilisation du théorème de Pythagore, les populations grecque et française disposent d'ETM_G idoines proches. Pour les caractéristiques géométriques du point J, cela n'est plus le cas puisque cette question nécessite l'introduction du cercle de centre J, un intermédiaire dans le travail. L'ETM_G *complexe* pour les questions B2 et B3 ne semble pas à portée de la plupart des étudiants grecs mais pose aussi des problèmes aux étudiants français.

La comparaison est plus difficile avec le Québec. En effet, si, dans le cas de la France et de la Grèce, les perspectives et visées des ETM_G idoines sont proches, ce qui est sans doute le signe d'une proximité des ETM_G de référence, en revanche cela n'est plus le cas avec le Québec, notamment pour ce qui est de la démonstration ce qui a des conséquences importantes sur les méthodes, le travail et la nature des objets en jeu. Ainsi, la méthodologie développée semble n'être pertinente, en utilisant des *énoncés* *neutres*, que lorsque les ETM_G de référence sont proches, ou qu'il y ait une certaine forme de compatibilité.

Références

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. A*nnales de Didactique et de sciences cognitives, 10*, 5-53.

Gras, R., Régnier, J.-C. & Guillet, F. (Eds.). (2009). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités. *Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, 16*. Toulouse, France : Cépaduès.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education*, *6.2,* 167-188.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 73-93.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2015). Spaces for Mathematical Work: Viewpoints and perspectives, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4). Special Issue, in press.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101. Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2015). Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve, *RELIME*, *17(4)*. (sous presse).

Brief Bio

Vincent Beck, Maître de conférences au laboratoire MAPMO de l'Université d'Orléans depuis 2011. Il s'intéresse aux problématiques de formation initiale et continue des enseignants du premier comme du second degré. Il se questionne en particulier sur la place de la géométrie dans les pratiques et dans la formation des enseignants.

Annette Braconne-Michoux, Professeur à l'Université de Montréal : formation initiale des enseignants (primaire et adaptation scolaire) en géométrie (théorie et didactique). Professeur à l'Université de Lyon 1-Claude Bernard, IUFM site de la Loire : formation initiale des enseignants du primaire et du secondaire en Mathématiques. Professeur de mathématiques au secondaire en France.

Assia Nechache Enseignante en mathématiques et didactique des mathématiques, à l'ESPE (École Supérieure du Professorat et de l'Éducation), Université d' Orléans. Formatrice des enseignants de premier et second degré, à l'ESPE (École Supérieure du Professorat et de l'Éducation), Université d' Orléans. Doctorante en didactique des mathématiques, laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot.

Konstantinos Nikolantonakis a un Doctorat en Epistémologie et Histoire des Mathématiques de l’Université Denis Diderot (Paris 7). Il travaille en tant que Professeur Associé à l’Université de Macédoine Ouest en Grèce. Il s’intéresse aux relations de l’histoire des Mathématiques avec l’éducation Mathématique.

Laurent Vivier a un Doctorat en Mathématiques (1998). Il a travaillé en tant que Maitre de Conférences pour 11 ans dans les IUFM (Instituts Universitaires de Formations des Maitres). Il est depuis 2011 en tant que Maitre de Conférences à l’Education Mathématique à l’Université Paris Diderot en France et membre du Laboratoire de Didactique André Revuz.

ISSN: 1792-8494